

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 8.02.2025  
Clasa a VIII-a

1. (7p) Determinați mulțimea  $A$  a numerelor întregi  $x \neq -1$ , pentru care  $\left\{ \frac{3x^2 + 60x + 57}{21x^2 + 28x + 7} \right\} = 0, (142857)$  și  $\left\{ \frac{2x^2 + 18x + 16}{10x^2 + 15x + 5} \right\} = 0, 2$ , unde  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .
2. (7p) Se consideră numerele reale pozitive  $a, b$  și  $c$  pentru care  $a \cdot b \cdot c = 1$ . Arătați că  $a + b + c \geq \frac{\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{b}}{b} + \frac{\sqrt{c}}{c}$ .
3. În prisma triunghiulară dreaptă  $ABCA'B'C'$  cu  $AB = 5$  cm,  $AC = 4$  cm,  $BC = 6$  cm, se consideră  $CD$  bisectoarea  $\sphericalangle ACB$ ,  $D \in AB$  și  $M \in A'B'$  astfel încât  $B'M = 3$  cm.
- a) (3p) Stabiliți poziția dreptei  $DM$  față de planul  $(ACC')$ .
- b) (4p) Determinați  $\sin \sphericalangle(A'B', AC)$ .
4. În prisma patrulateră regulată dreaptă  $ABCD A'B'C'D'$  cu muchia bazei de 20 cm și înălțimea de  $13\sqrt{3}$  cm, se consideră punctele  $M$  și  $N$  pe segmentele  $DC$ , respectiv  $A'D'$  astfel încât  $DM = A'N = 5$  cm. Știind că  $NP \perp AD$ ,  $P \in AD$  și  $BM \cap CP = \{E\}$ ,
- a) (3p) Arătați că  $BM \perp CP$ .
- b) (4p) Calculați  $d(N, BM)$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.